CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţele naturii
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII-a

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & mx^2+2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \middle| x\in\mathrm{R}, m\in\mathrm{R}\right\}$.

a) **(2p)** Determinați numărul real *m*, astfel încât *G* să fie parte stabilă a lui $M_3(\mathrm{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) **(3p)** Pentru $m=2$, demonstrați că *G* este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

c) **(2p)** Demonstrați că grupul $(G,\cdot)$ este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

Soluție:

a)	Impunând condiția $A(x)\cdot A(y)\in G$ rezultă $m=2$.	**2p**
b)	Verifică asociativitatea	**1p**
	Găsește elementul neutru $A(0)$	**1p**
	Demonstrează că orice element din *G* este inversabil, cu inversul $A(-x)$	**1p**
c)	Se demonstrează că funcția $f:\mathrm{R}\to G$, $f(x)=A(x)$ este un izomorfism de grupuri.	**2p**

2. Fie $f: R\to R$ o funcție bijectivă cu proprietatea că $f^{-1}(0)=1$. Pe mulțimea numerelor reale, *R*, definim legea de compoziție „$*$“ prin $a*b=f\left[f^{-1}(a)+f^{-1}(b)-1\right]$, $\forall a,b\in R$.

Știind că $(R,*)$ este grup comutativ, se cere:

a) **(4p)** Să se determine elementul neutru.

b) **(3p)** Să se afle $y\in R$ astfel încât simetricul în raport cu legea „$*$“ al elementului $a\in R$ să fie $f\left[y-f^{-1}(a)\right]$, $\forall a\in R$.

Soluție:

a) Rezolvare $\exists e \in R$ cu proprietatea că $e * a = a, \forall a \in R$ **2p**

$a * e = a, \forall a \in R.$

$f\left[f^{-1}(a) + f^{-1}(e) - 1\right] = a \Leftrightarrow .$

$f^{-1}(a) + f^{-1}(e) - 1 = f^{-1}(a)$

De unde se obține $f^{-1}(e) = 1$ **2p**

Din injectivitatea funcției *f*, rezultă $e = 0$

b) $b) a * a' = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(a) + f^{-1}(a') - 1 = f(0)$ **1p**

$\Leftrightarrow f^{-1}(a) + f^{-1}[f(y - f^{-1}(a)] - 1 = 1$ **1p**

Finalizare $y = 2$ **1p**

3. Fie funcția $f : [0, \infty) \to R,\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, x \in [0,2] \\ x^2 - 2x, x > 2 \end{cases}.$

   a) **(2p)** Arătați că *f* admite primitive pe intervalul de definiție.

   b) **(5p)** Determinați primitiva *F* a funcției *f* cu proprietatea că $F(3) = \frac{10}{3}$.

Soluție:

a) O funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval **1p**

Justificarea continuității pe $[0,2) \cup (2, \infty)$ **1p**

$f(2-0) = f(2) = f(2+0)$ rezultă că *f* este continuă în $x = 2$ și pe $[0, \infty)$, deci admite primitive.

b) Fie $F: [0, \infty) \to R$, o primitivă a funcției *f*. **2p**

$$Determina\ primitivele\ pe\ ramuri$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{4 - x^2} + 4arcsin\frac{x}{2}\right) + C_1, x \in [0,2] \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + C_2, x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

$$Functia\ F\ este\ derivabilă\ pe\ [0, \infty), deci\ este\ continuă.$$ **1p**

$$Impunând\ continuitatea\ funcţiei\ F\ în\ x = 2\ se\ obţine\ \pi + C_1 = \frac{-4}{3} + C_2$$ **1p**

$$C_2 = C_1 + \pi + \frac{4}{3}$$ **1p**

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{4 - x^2} + 4arcsin\frac{x}{2}\right) + C, x \in [0,2] \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + C + \pi + \frac{4}{3}, x \in (2, \infty) \end{cases}, C \epsilon R.$$

Impunând condiția $F(3) = \frac{10}{3}$ vom obține $C = 2 - \pi$

Primitiva căutată va fi $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{4 - x^2} + 4arcsin\frac{x}{2}\right) + 2 - \pi, x \in [0,2] \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + + \frac{10}{3}, x \in (2, \infty) \end{cases}$

4. Se consideră șirurile $I_n = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)dx$ și $J_n = \int_0^1 x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)dx$, $n \ge 1$.

a) **(1p)** Să se calculeze J_1 și J_2.

b) **(3p)** Să se arate că $(-1)^n I_n \le 0$, oricare ar fi $n \ge 1$.

c) **(3p)** Utilizând eventual schimbarea de variabilă $t = 1-x$, să se arate că $I_n = (-1)^n (J_n - nJ_{n-1})$, oricare ar fi $n \ge 2$.

Soluție:

a)	$J_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$	**0,5p**
	$J_2 = \int_0^1 x(x+1)dx = \frac{5}{6}$	**0,5p**
b)	Demonstrează că $I_n \le 0$, oricare ar fi $n \ge 1$, n par	**1p**
	Demonstrează că $I_n \ge 0$, oricare ar fi $n \ge 1$, n impar	**1p**
	Discută semnul numărului $(-1)^n I_n$, în funcție de paritatea numărului natural n	**1p**
c)	$I_n = \int_0^1 (1-t)(1-t-1)(1-t-2)\ldots(1-t-n+1)dt = \int_0^1 (1-t)\cdot(-1)^{n-1} t(t+1)\ldots(t+n-2)dt =$	**1p**
	$= \int_0^1 [n-(t+n-1)]\cdot(-1)^{n-1} t(t+1)\ldots(t+n-2)dt = (-1)^n J_n + n(-1)^{n-1} J_{n-1} = (-1)^n (J_n - nJ_{n-1})$	**2p**